

Calcul : Module 3

Fractions

1 DÉFINITION

DÉFINITION 1 : FRACTION

On appelle fraction un quotient (c'est-à-dire une division) de deux nombres entiers relatifs, que l'on note $\frac{a}{b}$ où $b \neq 0$

2 FRACTIONS ET SIGNES

PROPRIÉTÉ 1 : FRACTIONS ET SIGNES

Dans une fraction, si l'on change exclusivement le signe du numérateur ou exclusivement le signe du dénominateur, le signe de la fraction change. En revanche si l'on change à la fois les signes du numérateur et du dénominateur, on obtient la même fraction :

$$\text{Soit } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

EXEMPLE 1

$$\bullet \quad \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\bullet \quad \frac{34}{-53} = -\frac{34}{53}$$

$$\bullet \quad \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$$

$$\bullet \quad -\frac{-11}{-13} = -\frac{11}{13}$$

3 FRACTIONS IRRÉDUCTIBLES

DÉFINITION 2 : FRACTION IRRÉDUCTIBLE

On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si $b \in \mathbb{N}^*$ et si a et b sont premiers entre eux.

MÉTHODE 1

Pour mettre une fraction sous forme irréductible, on peut au choix :

- Décomposer le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers, puis simplifier.
- Simplifier la fraction au fur et à mesure en observant que le numérateur et le dénominateur sont divisibles par un même nombre, jusqu'à ce que la fraction soit irréductible.

EXEMPLE 2

$$\bullet \quad \frac{240}{54} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times 3} = \frac{40}{9}$$

$$\bullet \quad \frac{240}{54} = \frac{120}{27} = \frac{40}{9}$$

RÉPONSE DU TEST EN AUTONOMIE 1

a. $\frac{3}{140}$

b. $\frac{5}{13}$

c. $\frac{2-\sqrt{3}}{10}$

d. $\frac{7}{2} = 3,5$

e. $\frac{-12x^2+3x+8}{12x^2}$

ENTRAÎNEMENT 1

Mettre les fractions suivantes sous forme irréductible :

a. $\frac{12}{38}$

b. $\frac{156}{144}$

c. $\frac{699}{987}$

4 RÈGLES DE CALCUL

PROPRIÉTÉ 2

Soient a un réel. Soient b, c et d des réels non nuls et $n \in \mathbb{N}$. Nous disposons des règles de calcul suivantes pour les fractions :

• $\frac{ab}{cb} = \frac{a\cancel{b}}{c\cancel{b}} = \frac{a}{c}$

• $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

• $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$

• $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

• $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

• $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

• $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$

• $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ENTRAÎNEMENT 2

Ecrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible :

a. $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{7}{6}$

b. $4,5 \times \left(\frac{22}{99} + \frac{14}{117}\right)$

c. $\frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{4}}{4 - \frac{1}{3}}$

d. $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}$

5 FRACTIONS ET VARIABLES / FRACTIONS ET CONSTANTES

MÉTHODE 2

Lorsqu'on doit simplifier une fraction avec des variables ou des constantes, les techniques sont les mêmes : on cherche le meilleur dénominateur possible, et on n'hésite pas à utiliser ses autres connaissances en calcul !

ENTRAÎNEMENT 3

Simplifier au maximum les fractions suivantes en précisant pour les deux premières expressions les valeurs interdites pour x :

a. $\frac{1+x}{2+\frac{1}{x}}$

c. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

e. $\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{1+\sqrt{2}}$

b. $\frac{x}{8} + \frac{3}{x} + \frac{1+x}{2x}$

d. $\frac{(e-1)^2}{e^2} - \frac{e+1}{e}$

f. $\left(\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3$

TEST EN AUTONOMIE 1

Simplifier au maximum les fractions proposées :

a. $\frac{1}{4} - \frac{2}{5} \times \frac{4}{7}$

b. $\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9} + \frac{4}{3}}$

c. $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{5}}\right)^2$

d. $4 - \frac{1+\frac{1}{2}}{3}$

e. $\frac{2}{3x^2} + \frac{3}{12x} - 1$