

Calcul : Module 2

Calculer avec des racines carrées

1 DÉFINITION D'UNE RACINE CARRÉE

DÉFINITION 1 : RACINE CARRÉE

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On appelle racine carrée de x et on note $\sqrt{x}$ l'unique nombre positif dont le carré vaut x

Remarque 1 : Ainsi, par définition, pour tout x positif on a : $\sqrt{x} \geq 0$ et $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$

EXEMPLE 1

- $\sqrt{4} = 2$ puisque $2 \geq 0$ et $2^2 = 4$
- Il est faux de dire que -3 est la racine carrée de 9. En effet, $-3 < 0$.
- $\sqrt{2}$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut 2. Ce nombre est irrationnel et son écriture décimale 1.4142135... comporte une infinité de chiffres après la virgule. Pour cette raison, on garde l'écriture $\sqrt{2}$ dans les calculs sans chercher à l'écrire sous forme décimale.
- Il est faux d'écrire $\sqrt{2} = 1.41$.
- Il est correct d'écrire $\sqrt{2} \approx 1.41$ ou $\sqrt{2} = 1.41$, arrondi au centième.
- $-\sqrt{2}$ est un nombre strictement négatif dont le carré vaut 2. De plus, $-\sqrt{2} \approx -1.41$

ENTRAÎNEMENT 1

Simplifier les expressions suivantes :

- $\sqrt{(-7)^2}$
- $\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$
- $\sqrt{\left(2\pi - \frac{13}{2}\right)^2}$

2 RÈGLES DE CALCUL

PROPRIÉTÉ 1

Soit a et b des réels positifs et $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^n} = \sqrt[n]{a^n} \quad , \quad \text{et si } b \neq 0, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Remarque 2 : Attention, il n'est en général pas vrai que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Par exemple, $\sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ et $\sqrt{4} + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$. Or $\sqrt{8} \neq 4$ puisque $4^2 \neq 8$.

3 SIMPLIFICATION D'UNE RACINE

MÉTHODE 1 : SIMPLIFIER UNE RACINE SIMPLE

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour simplifier l'écriture de $\sqrt{n}$:

- on décompose n en produit de facteurs premiers.
- on utilise la propriété $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ qui nous permet de faire des simplifications. En effet, dès qu'un facteur apparaît en double dans la décomposition, on pourra simplifier une racine.

Par exemple, si on souhaite simplifier $\sqrt{72}$:

On décompose 72 en produit de facteurs premiers :

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$\text{Ainsi, } \sqrt{72} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3} = \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3 \times 3} = 2 \times \sqrt{2} \times 3 = 6\sqrt{2}.$$

On aurait pu aller plus vite en remarquant que $72 = 6 \times 6 \times 2$.

$$\text{En effet, } \sqrt{72} = \sqrt{6 \times 6 \times 2} = \sqrt{6 \times 6} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

ENTRAÎNEMENT 2

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

a. $\sqrt{54}$

c. $\sqrt{109}$

e. $\sqrt{15} \times \sqrt{21}$

b. $\sqrt{242}$

d. $\sqrt{48} - \sqrt{12}$

f. $\sqrt{80} + \sqrt{27}$

MÉTHODE 2 : UTILISER UNE IDENTITÉ REMARQUABLE POUR SIMPLIFIER UNE RACINE

On peut parfois reconnaître une identité remarquable à l'intérieur d'une racine, ce qui permet de la simplifier.

Par exemple, on souhaite simplifier $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

En remarquant que $3+2\sqrt{2} = 1+2\sqrt{2}+2 = (1+\sqrt{2})^2$, on a alors $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1+\sqrt{2}$

Le simple fait de connaître cette méthode permet parfois de simplifier des expressions du type $\sqrt{a+\sqrt{b}}$

ENTRAÎNEMENT 3

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

b. $\sqrt{21+12\sqrt{3}}$

c. $\sqrt{53-20\sqrt{7}}$

RÉPONSE DU TEST EN AUTONOMIE 1

a. $26+15\sqrt{3}$

c. $24\sqrt{3}$

e. $\frac{1}{7}(6+3\sqrt{3}+2\sqrt{2}+\sqrt{6})$

b. $-12-9\sqrt{2}$

d. $2\sqrt{2}$

f. $\sqrt{6-2\sqrt{7}}$

4 ELIMINER LES RACINES AU DÉNOMINATEUR

Lorsque l'on fait un calcul dans lequel il y a des quotients et des racines, il est souvent préférable pour simplifier au maximum l'expression d'éliminer les racines présentes au dénominateur. On dispose pour cela de deux méthodes.

MÉTHODE 3 : SIMPLIFIER UN QUOTIENT DU TYPE $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Pour simplifier un quotient du type $\frac{a}{\sqrt{b}}$, où $b \in \mathbb{N}^*$, il suffit de multiplier au numérateur et au dénominateur par $\sqrt{b}$. Cela va en effet éliminer automatiquement la racine au dénominateur :

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Par exemple, on a : $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

ENTRAÎNEMENT 4

Simplifier les expressions suivantes en éliminant les racines au dénominateur :

a. $\frac{3}{\sqrt{7}}$

b. $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{35}}$

c. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}$

MÉTHODE 4 : SIMPLIFIER UN QUOTIENT DU TYPE $\frac{k}{a + \sqrt{b}}$

Pour simplifier un quotient du type $\frac{k}{a + \sqrt{b}}$ où $b \in \mathbb{N}^*$:

On multiplie au numérateur et au dénominateur par **quantité conjuguée** de $a + \sqrt{b}$, à savoir par $a - \sqrt{b}$.

En effet, les racines vont se simplifier au dénominateur grâce à la troisième identité remarquable :

$$\frac{k}{a + \sqrt{b}} = \frac{k(a - \sqrt{b})}{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})} = \frac{k(a - \sqrt{b})}{a^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{k(a - \sqrt{b})}{a^2 - b}$$

Remarque 3 : Si l'on doit simplifier $\frac{k}{a - \sqrt{b}}$, la quantité conjuguée par laquelle on doit multiplier est alors $a + \sqrt{b}$

Par exemple : $\frac{3}{1 + \sqrt{2}} = \frac{3(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{3 - 3\sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{3 - 3\sqrt{2}}{-1} = 3\sqrt{2} - 3$

ENTRAÎNEMENT 5

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\frac{4}{7 + \sqrt{3}}$

b. $\frac{2}{3 - \sqrt{5}}$

c. $\frac{5 + \sqrt{8}}{\sqrt{2} - 3}$

d. $\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$

5 A VOUS DE JOUER!

ENTRAÎNEMENT 6

a. $\sqrt{\frac{7}{3}} - 3\sqrt{\frac{28}{27}} + 4\sqrt{\frac{42}{50}}$

c. $\sqrt{(3\sqrt{3}-6)^2} + \sqrt{4(1-\sqrt{3})^2}$

b. $(\sqrt{28} + \sqrt{7} + \sqrt{32})(\sqrt{63} - 2\sqrt{8})$

d. $\frac{\sqrt{27} + \sqrt{12} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

ENTRAÎNEMENT 7

Déterminer une expression simplifiée de $\frac{\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5} + \sqrt{2}}$

ENTRAÎNEMENT 8

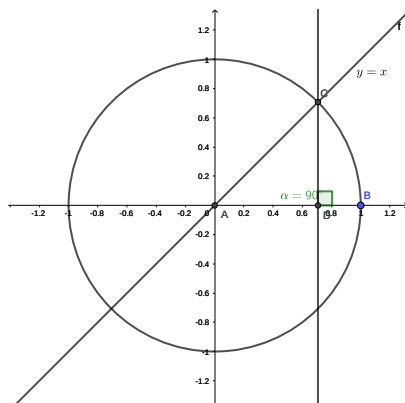
Soit $A = \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}}$

a. Calculer A^2 .

b. En déduire la valeur exacte de A .

ENTRAÎNEMENT 9

Calculer la distance AD :



TEST EN AUTONOMIE 1

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

a. $(2 + \sqrt{3})^3$

c. $\frac{144}{\sqrt{12}}$

e. $\frac{1}{(2 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{2})}$

b. $\frac{\sqrt{18}(1 + \sqrt{2})}{1 - \sqrt{2}}$

d. $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$

f. $\sqrt{3 + \sqrt{2}} - \sqrt{3 - \sqrt{2}}$