

Calcul : Module 1

Développement / coefficients binomiaux

1 DÉVELOPPEMENT

DÉFINITION 1 : DÉVELOPPER

Développer une expression algébrique, c'est la mettre sous forme d'une somme

EXEMPLE 1

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont développées?

• $x^2 + 2x + 3$

• $x^2 - 2x - 3$

• $3x(x + 4)$

• $3x(x - 4)$

• $x^2 + 2 + 2$

• $\frac{4x + 3}{x^2 - x + 1}$

2 RÉDUCTION

DÉFINITION 2 : FORME DÉVELOPPÉE RÉDUITE

Mettre une expression algébrique sous forme développée réduite, c'est la mettre sous forme développée, en regroupant tous les termes d'un même degré afin de simplifier au maximum l'expression.

EXEMPLE 2

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont développées réduites?

• $x^2 + 3x - 2x + 1$

• $x^3 - 1$

• $(x - 4)(y + 3)$

• $(1 - x) + (2 - x^2)$

• $x^2 + 3xy + y^2 - 7$

• $x^2y + 2xy + yx^2 + 2 + \frac{xy}{2}$

3 COMMENT DÉVELOPPER ?

MÉTHODE 1 : DÉVELOPPER UNE EXPRESSION ALGÈBRIQUE

Pour développer une expression algébrique, on peut utiliser la distributivité, la double distributivité, ou les identités remarquables qui découlent directement de la double distributivité :

- Distributivité : Soit a, b, c des réels : $a(b + c) = ab + ac$
- Double distributivité : Soit a, b, c et d des réels : $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$
- Identité remarquable 1 : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Identité remarquable 2 : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Identité remarquable 3 : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Remarque 1 : Lorsqu'il y a une seule variable, on classe généralement les termes par ordre de degré décroissants. On préférera donc avoir comme expression finale $x^3 - 4x^2 + x + 1$ que $1 + x - 4x^2 + x^3$ (ou pire que $-4x^2 + 1 + x + x^3$)

MÉTHODE 2 : DÉVELOPPER AVEC PLUSIEURS FACTEURS

Pour développer un produit avec plus de deux facteurs, on peut développer dans l'ordre que l'on veut, mais il faut procéder étape par étape.

Par exemple, pour développer et réduire $x(x+1)(4x-2)$ on peut procéder de deux manières :

$$\begin{aligned}
 \overbrace{x(x+1)(4x-2)}^{\text{Étape 1}} &= (x^2+x)(4x-2) \\
 &= 4x^3+4x^2-2x^2-2x && \text{Double distributivité} \\
 &= 4x^3+2x^2-2x && \text{Réduction finale}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overbrace{x(x+1)(4x-2)}^{\text{Étape 1}} &= x(4x^2+4x-2x-2) \\
 &= x(4x^2+2x-2) && \text{Réduction dans la parenthèse} \\
 &= 4x^3+2x^2-2x && \text{Distributivité simple}
 \end{aligned}$$

MÉTHODE 3 : DÉVELOPPER UN SIGNE "-"

Pour développer un signe -, on change tous les signes des éléments à l'intérieur de la parenthèse concernée.

Par exemple, $x^3 - (4x^2 + 5x - 7) = x^3 - 4x^2 - 5x + 7$

MÉTHODE 4 : DÉVELOPPER UN CARRÉ PLUS COMPLIQUÉ

Pour développer un carré avec plus de deux éléments dans la parenthèse, on généralise les identités remarquables en identifiant les carrés et les doubles produits. Par exemple :

$$\begin{aligned}
 \bullet (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \\
 \bullet (a-b+c-d)^2 &= a^2 + (-b)^2 + c^2 + (-d)^2 + 2a \times (-b) + 2ac + 2a \times (-d) + 2 \times (-b) \times c + 2 \times (-b) \times (-d) + 2c \times (-d) \\
 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd
 \end{aligned}$$

En pratique, pour ce dernier calcul, on ne fait qu'une seule étape en développant "à la volée"

ENTRAÎNEMENT 1

Développer et réduire les expressions suivantes :

a. $(x+1)^2 - 6x(x+3)$

e. $(x+1)(x-2)(x+3)$

b. $(4(x-3))^2$

f. $(3x-2)^3$

c. $(x+y)^2 - (x-y)^2 - 2x(x+2y)$

g. $(3x-x^2+8)^2$

d. $3(3x+2)(2x-3)$

h. $(1+2x+3x^2-4x^3)^2 - (x+7)^2(3x^2-x-1)$

RÉPONSE DU TEST EN AUTONOMIE 1

a. $16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$

d. $12x^3 - 15x^2 + 21x$

b. $-12x^3 + 33x^2 - 21x$

e. $16x^4 + 120x^3 + 353x^2 + 480x + 256$

c. $100 - 51\sqrt{3}$

f. $436 - 192\sqrt{5}$

4 DÉVELOPPER AVEC LE TRIANGLE DE PASCAL

Par ses nombreuses applications, notamment en calcul, il est important de connaître le triangle de Pascal et de savoir le refaire rapidement. Un algorithme pour remplir le triangle de Pascal vous est proposé ci-dessous.

- 1→ Numéroté les lignes et les colonnes, à l'extérieur des cases, de 0 à 7. (on aurait pu aller à plus que 7)
- 2→ Remplir les cases dont l'indice de la colonne est strictement supérieur à celui de la ligne avec le nombre 0.
- 3→ Remplir chaque case dont l'indice de la colonne est 0 avec le nombre 1.
- 4→ Remplir chaque case dont l'indice de la colonne est égal à celui de la ligne avec le nombre 1.
- 5→ On complète ensuite les cases restantes du haut vers le bas de manière à ce que chaque case soit remplie par la somme des deux nombres situés :
 - Dans la case au dessus de la case à remplir
 - Dans la case située à gauche de la case précédente (en haut à gauche de la case à remplir)

ENTRAÎNEMENT 2

Remplir le triangle de Pascal ci-dessous en suivant les étapes de l'algorithme proposé.

On peut maintenant développer $(x + y)^n$ en observant la ligne n du triangle :

- $(x + y)^0 = 1$ (C'est comme ça ! N'importe quel nombre à la puissance 0 donne 1)
- $(x + y)^1 = 1 \times x^1 + 1 \times y^1 = x + y$
- $(x + y)^2 = 1 \times x^2 + 2 \times x \times y + 1 \times y^2$
- $(x + y)^3 = 1 \times x^3 + 3 \times x^2 \times y + 3 \times x \times y^2 + 1 \times y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x + y)^4 =$
- $(x + y)^5 =$

On peut également développer $(x - y)^n$ de la même façon en changeant un + sur deux en - :

- $(x - y)^0 = 1$ (C'est comme ça ! N'importe quel nombre à la puissance 0 donne 1)

- $(x - y)^1 = 1 \times x^1 - 1 \times y^1 = x - y$
- $(x - y)^2 = 1 \times x^2 - 2 \times x \times y + 1 \times y^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(x - y)^3 = 1 \times x^3 - 3 \times x^2 \times y + 3 \times x \times y^2 - 1 \times y^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
- $(x - y)^4 =$
- $(x - y)^5 =$

ENTRAÎNEMENT 3

Développer et réduire les expressions suivantes :

• $(x + 3)^3$

• $(2x - 3)^4$

• $(1 + \sqrt{2})^5$

5 FACTORIELLE**DÉFINITION 3 : FACTORIELLE**

On définit pour tout nombre entier naturel n la factorielle de n , notée $n!$, par :

• Si $n = 0$, $0! = 1$

• Si $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \prod_{k=1}^n k$ ($n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$)

EXEMPLE 3

• $0! = 1$

• $1! = 1$

• $2! = 1 \times 2 = 2$

• $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

ENTRAÎNEMENT 4

Sans calculatrice,

• Calculer $5!$ et $7!$

• Comparer $10!$ et 10^8

• Simplifier $\frac{9!}{(5!)^2}$

PROPRIÉTÉ 1

$\forall n \in \mathbb{N}, n \times (n - 1)! = n!$

6 COEFFICIENTS BINOMIAUX**DÉFINITION 4 : COEFFICIENT BINOMIAUX**

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, tels que $p \leq n$, on définit pour le moment le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ (lire “ p parmi n ”) par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n - p)!}$$

ENTRAÎNEMENT 5

Calculer les coefficients binomiaux suivants : $\binom{4}{1}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{7}{3}$

ENTRAÎNEMENT 6

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $p \leq n$. Compléter et démontrer les propriétés suivantes :

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{n \geq 0} = \underbrace{\binom{n}{1}}_{n \geq 1} = \underbrace{\binom{n}{2}}_{n \geq 2} \quad \cdot \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \cdot \underbrace{\binom{n}{n}}_{n \geq 0} = \underbrace{\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}}_{0 < p < n} = \binom{n}{p}$$

7 LIEN AVEC LE TRIANGLE DE PASCAL ET FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

Le triangle de Pascal, comme nous venons de le voir, est utile pour effectuer des développements du type $(a+b)^n$, au travers de la formule du binôme de Newton que nous allons voir ci-après.

ENTRAÎNEMENT 7

Faire le lien entre les formules de l'entraînement 6 et la manière dont a été construit le triangle de Pascal à l'entraînement 2.

THÉORÈME 1 : FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

Pour tous nombres réels (ou complexes) a et b , et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

C'est-à-dire :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

On a également :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

ENTRAÎNEMENT 8

Grâce à la formule du binôme de Newton, donner une forme algébrique du nombre $(3+2i)^3$

Pour vérifier certains calculs, vous pouvez utiliser les logiciels XCAS ou Wolframalpha, tous les deux accessibles en ligne. La commande `simplify` permet de donner la forme développée réduite d'une expression choisie.

Par exemple, la commande `simplify((2x-3)^4)` renvoie $16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$

RÉPONSE DU TEST EN AUTONOMIE 2

a. 84 b. $\frac{8}{5}$ c. n d. $8-8i$

8 A VOUS DE JOUER !

TEST EN AUTONOMIE 1

Développer et réduire les expressions suivantes :

a. $(3 - 2x)^4$

b. $(1 - x)(4x - 7) \times 3x$

c. $(4 - \sqrt{3})^3$

d. $3x(4x(x - 3) + 7(x + 1))$

e. $(x - 4(x + 2)^2)^2$

f. $((1 - \sqrt{5})^3 + 2\sqrt{5})^2$

TEST EN AUTONOMIE 2

Sans calculatrice, et avec très peu de calculs, déterminer les quantités suivantes :

a. $\binom{9}{3}$

b. $\binom{12}{5} \times \binom{12}{4}^{-1}$

c. $\left(\sum_{k=1}^n k\right) - \binom{n}{2}$

d. $(1 + i)^7$